

PERAMBATAN GELOMBANG *SHOCK* AKIBAT HANCURNYA SUATU BENDUNGAN LINGKAR

Sudi Mungkasi

*Program Studi Matematika, Fakultas Sains dan Teknologi, Universitas Sanata Dharma,
Mrican, Tromol Pos 29, Yogyakarta 55002, Indonesia
sudi@usd.ac.id*

ABSTRAK

Aliran air dapat dimodelkan secara matematis dengan model persamaan air dangkal. Penyelesaian persamaan air dangkal bisa kontinu dan bisa juga diskontinu. Contoh penyelesaian diskontinu dari persamaan air dangkal adalah gelombang *shock*. Dalam hasil penelitian sebelumnya, diketahui bahwa perambatan gelombang *shock* yang muncul dari hancurnya suatu bendungan lingkaran bersifat nonlinear terhadap waktu. Dalam penelitian tersebut, hampiran yang digunakan dalam merekam gelombang *shock* menggunakan ketelitian tiga angka desimal di belakang koma. Perlu diingat bahwa hasil simulasi dalam penelitian tersebut hanya menggunakan 1000 sel. Dalam makalah kali ini, simulasi hancurnya bendungan lingkaran diperhalus hingga seratus kali, yaitu sebanyak 100.000 sel untuk diskritisasi domain ruang. Jadi, hasil kali ini lebih akurat dari pada hasil sebelumnya. Hasil yang lebih akurat ini akan bermanfaat bagi komunitas matematika terapan dan dinamika fluida sebagai acuan untuk eksperimen tentang bendungan lingkaran. Selain itu, hasil ini lebih meyakinkan bahwa gelombang *shock* yang muncul dari hancurnya bendungan lingkaran benar-benar bersifat nonlinear terhadap waktu. Hal ini merupakan kesimpulan yang berbeda tentang sifat perambatan gelombang *shock* yang muncul akibat hancurnya suatu bendungan planar yang adalah linear terhadap waktu. Lebih lanjut, hasil perambatan gelombang air dari bendungan lingkaran dengan kondisi awal luar tanggul yang kering juga akan dipaparkan dalam makalah ini, di mana hasil ini belum dipaparkan dalam penelitian sebelumnya.

Kata-kata kunci: bendungan lingkaran, gelombang *shock*, persamaan air dangkal

PENDAHULUAN

Banyak tampungan air berbentuk silinder dan menyerupai drum berukuran besar. Bahan tampungan air bisa dari material batuan dan semen. Jika tampungan air yang digunakan sebagai persediaan air bersih bagi penduduk suatu kota ternyata pecah (bobol), maka air akan mengalir ke sekelilingnya.

Tampungan air berbentuk silinder disebut sebagai bendungan lingkaran. Dari penelitian-penelitian sebelumnya, pecahnya bendungan lingkaran bisa menimbulkan gelombang *shock* (kejut) [1-3]. Gelombang *shock* ini merupakan penyelesaian diskontinu dari persamaan air dangkal. Persamaan air dangkal sendiri merupakan suatu model matematika yang dipakai untuk menjelaskan aliran-aliran jenis air dangkal.

Makalah ini menawarkan hasil penelitian yang lebih akurat dari hasil penelitian sebelumnya [1]. Pada hasil yang lalu didapatkan bahwa hubungan antara posisi gelombang *shock* adalah nonlinear terhadap waktu. Kesimpulan tersebut diperoleh dengan bantuan metode volume hingga menggunakan 1000 sel untuk diskritisasi domain ruangnya. Dalam makalah saat ini digunakan diskritisasi yang lebih baik, yaitu sebanyak 100.000 sel. Jadi hasil penelitian kali ini jauh lebih akurat. Selain itu, kasus pecahnya bendungan lingkaran yang melibatkan tanah yang kering juga akan disimulasikan dalam makalah ini.

MODEL DAN METODE

Model matematika yang dapat digunakan untuk menjelaskan aliran pecahnya bendungan lingkaran adalah persamaan air dangkal berikut

$$(bh)_t + (bhu)_x = 0, \quad (1)$$

$$(bhu)_t + (bhu^2 + \frac{1}{2}gh^2b)_x = gh^2b_x, \quad (2)$$

dengan x dan t secara berturut-turut adalah variabel ruang dan waktu. Di sini $b=b(x)$ adalah lebar kanal aliran, $h=h(x,t)$ adalah kedalaman air, $u=u(x,t)$ adalah kecepatan aliran, serta g adalah konstanta gravitasi. Perlu dicatat bahwa notasi b_x artinya adalah turunan b terhadap x . Persamaan yang paling sederhana tentang persamaan air dangkal pertama kali diturunkan oleh Saint-Venant [4].

Model matematika tersebut dapat diselesaikan menggunakan metode volume hingga. Pertama-tama, dipandang bahwa dua persamaan air dangkal dapat ditulis secara vektoris yang berbentuk

$$\mathbf{q}_t + \mathbf{f}(\mathbf{q})_x = \mathbf{s}. \quad (3)$$

Variabel \mathbf{q} adalah vektor kuantitas yang dikekalkan, $\mathbf{f}(\mathbf{q})$ adalah vektor flux dan \mathbf{s} adalah vektor sumber. Selanjutnya domain ruang didiskritisasi menjadi sebanyak berhingga sel, dengan panjang sel ke i dilambangkan oleh Δx_i .

Dalam bentuk semidiskrit, metode volume hingga untuk persamaan (3) dapat ditulis

$$\frac{d\mathbf{q}_i}{dt} + \frac{1}{\Delta x_i} (\mathbf{f}_{i+\frac{1}{2}} - \mathbf{f}_{i-\frac{1}{2}}) = \mathbf{s}_i. \quad (4)$$

Di sini $\mathbf{f}_{i+\frac{1}{2}}$ dan $\mathbf{f}_{i-\frac{1}{2}}$ adalah flux yang masuk dan keluar dari sel ke i . Notasi \mathbf{s}_i melambangkan diskritisasi sumber dari sel ke i . Metode volume hingga berbentuk persamaan (4) selengkapnya dapat dilihat dalam beberapa pustaka [5, 6]. Perlu diperhatikan bahwa persamaan air dangkal (1) dan (2) secara simultan berlaku untuk memodelkan aliran air dangkal dalam kondisi

topografi horizontal. Untuk yang topografi yang sebarang, model persamaan air dangkal dapat dilihat dalam beberapa pustaka yang ada [1, 2].

HASIL DAN DISKUSI

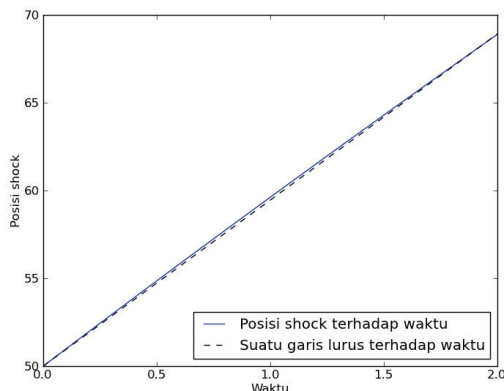
Dalam bagian ini akan disajikan hasil penelitian tentang penyelesaian numeris bendungan lingkaran. Perlu diinformasikan bahwa masalah pecahnya bendungan yang lebih sederhana, yaitu bendungan planar baik yang melibatkan topografi kering maupun topografi basah, telah ditemukan penyelesaian analitisnya [7]. Namun demikian, masalah bendungan lingkaran hingga saat ini belum ada yang menemukan penyelesaian analitisnya. Oleh sebab itu, makalah ini akan menyelesaikan masalah pecahnya bendungan lingkaran secara numeris, yaitu menggunakan metode volume hingga.

Ada dua masalah pecahnya bendungan lingkaran yang diselesaikan dalam makalah ini. Masalah pertama adalah bendungan lingkaran yang tidak melibatkan topografi kering. Masalah kedua melibatkan topografi yang basah dan kering. Konstanta gravitasi diambil sebesar 9.81 m/s^2 .

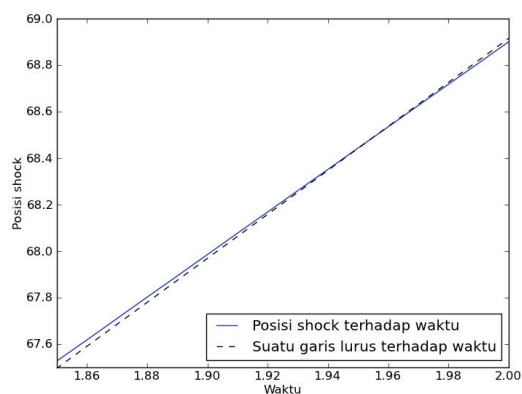
Masalah pertama adalah sebagai berikut. Dipandang suatu bendungan lingkaran dengan jari-jari 50m. Air di dalam bendungan mempunyai kedalaman 10m, sedangkan di luar bendungan mempunyai kedalaman 1m. Masalah ini dapat diselesaikan dengan menggunakan model persamaan air dangkal (1) dan (2). Hal ini dapat terjadi dengan memanfaatkan sifat simetri dari bendungan lingkaran. Di sini dipandang lebar aliran $b(x)=2\pi x$. Panjang aliran ditetapkan 100m. Kedalaman air adalah 10m untuk x dalam interval $[0,50]$ dan 1 untuk x dalam interval $[50,100]$. Domain ruang $[0,100]$ didiskritisasi menjadi 100.000 sel. Diskritisasi ini lebih halus 100 kali dari pada yang ada dalam penelitian sebelumnya [1].

Gambar 1 menunjukkan hasil simulasi pada waktu 2 detik setelah pecahnya bendungan. Di sini *stage* adalah permukaan air, *momentum* adalah debit air dan *velocity* adalah kecepatan gerak perambatan air. Diskontinuitas permukaan air yang muncul merupakan gelombang *shock*.

Gambar 1. Hasil simulasi pada waktu 2 detik setelah pecahnya bendungan



Gambar 2. Posisi *shock* yang bukan merupakan fungsi linear terhadap waktu. Di sini, posisi *shock* digambarkan untuk waktu dari 0 hingga 2 detik.



Gambar 3. Perbesaran **Gambar 2** untuk posisi *shock* terhadap waktu yang bukan merupakan fungsi linear. Di sini, posisi *shock* digambarkan untuk waktu dari 1,85 hingga 2 detik.

Tabel 1. Posisi *shock* terhadap waktu yang dihitung dari 0,01 hingga 0,5 detik

waktu	posisi	waktu	posisi
0,01	50,0995	0,26	52,5395
0,02	50,1985	0,27	52,6365
0,03	50,2965	0,28	52,7335
0,04	50,3945	0,29	52,8305
0,05	50,4915	0,3	52,9275
0,06	50,5895	0,31	53,0245
0,07	50,6875	0,32	53,1215

0,08	50,7855	0,33	53,2185
0,09	50,8835	0,34	53,3145
0,10	50,9815	0,35	53,4115
0,11	51,0785	0,36	53,5085
0,12	51,1765	0,37	53,6045
0,13	51,2745	0,38	53,7015
0,14	51,3715	0,39	53,7985
0,15	51,4695	0,4	53,8945
0,16	51,5665	0,41	53,9915
0,17	51,6645	0,42	54,0875
0,18	51,7615	0,43	54,1845
0,19	51,8585	0,44	54,2805
0,20	51,9565	0,45	54,3765
0,21	52,0535	0,46	54,4735
0,22	52,1505	0,47	54,5695
0,23	52,2485	0,48	54,6655
0,24	52,3455	0,49	54,7615
0,25	52,4425	0,5	54,8585

Gambar 2 menunjukkan grafik hubungan posisi *shock* terhadap waktu. Dari gambar ini nampak bahwa hubungan posisi *shock* adalah nonlinear terhadap waktu. Hal ini nampak jelas karena kurva posisi *shock* tidak sejajar dengan kurva linear. Bahkan kurva posisi *shock* memotong kurva linear sebanyak dua kali di titik yang berbeda.

Perbesaran **Gambar 2** ini ditunjukkan oleh **Gambar 3** untuk waktu dari 1,85 hingga 2 detik. Terdapat perpotongan antara dua kurva. Perpotongan ini, sekali lagi, jelas menunjukkan sifat nonlinear dari hubungan posisi *shock* terhadap waktu.

Tabel 2. Posisi *shock* terhadap waktu yang dihitung untuk periode 0,51 hingga 1 detik

waktu	posisi	waktu	posisi
0,51	54,9545	0,76	57,3455
0,52	55,0505	0,77	57,4405
0,53	55,1465	0,78	57,5355
0,54	55,2425	0,79	57,6305
0,55	55,3385	0,8	57,7265
0,56	55,4345	0,81	57,8215
0,57	55,5305	0,82	57,9165
0,58	55,6265	0,83	58,0115
0,59	55,7215	0,84	58,1055
0,6	55,8175	0,85	58,2005
0,61	55,9135	0,86	58,2955
0,62	56,0095	0,87	58,3905
0,63	56,1045	0,88	58,4855
0,64	56,2005	0,89	58,5805
0,65	56,2965	0,9	58,6745
0,66	56,3915	0,91	58,7695
0,67	56,4875	0,92	58,8645
0,68	56,5825	0,93	58,9585
0,69	56,6785	0,94	59,0535
0,7	56,7735	0,95	59,1485
0,71	56,8695	0,96	59,2425
0,72	56,9645	0,97	59,3375
0,73	57,0595	0,98	59,4315
0,74	57,1555	0,99	59,5255
0,75	57,2505	1	59,6205

Tabel 3. Posisi *shock* terhadap waktu yang dihitung untuk periode 1,01 hingga 1,5 detik

waktu	posisi	waktu	posisi
1,01	59,7145	1,26	62,0625
1,02	59,8085	1,27	62,1565
1,03	59,9035	1,28	62,2495
1,04	59,9975	1,29	62,3435
1,05	60,0915	1,3	62,4365
1,06	60,1855	1,31	62,5305
1,07	60,2805	1,32	62,6235
1,08	60,3745	1,33	62,7165
1,09	60,4685	1,34	62,8095
1,1	60,5625	1,35	62,9035
1,11	60,6565	1,36	62,9965
1,12	60,7505	1,37	63,0895
1,13	60,8445	1,38	63,1825
1,14	60,9385	1,39	63,2755
1,15	61,0325	1,4	63,3695
1,16	61,1255	1,41	63,4625
1,17	61,2195	1,42	63,5555
1,18	61,3135	1,43	63,6485
1,19	61,4075	1,44	63,7415
1,20	61,5015	1,45	63,8345
1,21	61,5945	1,46	63,9265
1,22	61,6885	1,47	64,0195
1,23	61,7825	1,48	64,1125
1,24	61,8755	1,49	64,2055
1,25	61,9695	1,5	64,2985

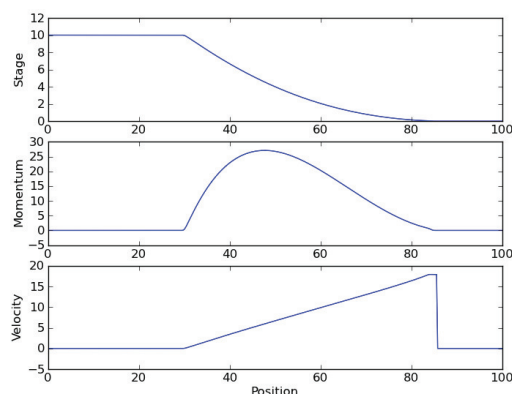
Posisi *shock* terhadap waktu secara detail disajikan dalam **Tabel 1-4**. Secara berturut-turut, **Tabel 1** berisi posisi *shock* terhadap waktu hingga 0,5 detik, **Tabel 2** memuat posisi *shock* hingga waktu 1 detik, **Tabel 3** hingga waktu 1,5 detik, dan **Tabel 4** hingga 2 detik. Dari keempat tabel ini hasil dinyatakan hingga empat angka signifikan. Hasil ini tentu saja lebih akurat daripada hasil sebelumnya [1]. Dalam hasil sebelumnya [1], setelah 2 detik gelombang *shock* telah merambat sejauh 18,915 m. Ternyata dengan memperhalus diskritisasi domain menjadi 100.000 sel, gelombang *shock* merambat sejauh 18,9005 m seperti ditampilkan dalam **Tabel 4**.

Masalah kedua yang dibahas dalam makalah ini adalah pecahnya bendungan lingkaran yang melibatkan topografi yang basah dan kering. Dipandang masalah bendungan lingkaran seperti sebelumnya, tetapi kedalaman air di luar bendungan diubah menjadi 0 m. Artinya adalah pada kondisi awal, air hanya ada di dalam bendungan lingkaran, sedangkan tanah di luar bendungan adalah kering.

Gambar 4 menunjukkan hasil simulasi 2 detik setelah terjadi pecahnya bendungan. Di sini tidak dijumpai gelombang *shock* permukaan air. Simulasi ini menggunakan 400 sel.

Tabel 4. Posisi *shock* terhadap waktu yang dihitung untuk periode 1,51 hingga 2 detik

waktu	posisi	waktu	posisi
1,51	64,3915	1,76	66,7005
1,52	64,4835	1,77	66,7925
1,53	64,5765	1,78	66,8845
1,54	64,6695	1,79	66,9765
1,55	64,7615	1,8	67,0685
1,56	64,8545	1,81	67,1605
1,57	64,9475	1,82	67,2515
1,58	65,0395	1,83	67,3435
1,59	65,1325	1,84	67,4355
1,6	65,2245	1,85	67,5275
1,61	65,3175	1,86	67,6185
1,62	65,4095	1,87	67,7105
1,63	65,5015	1,88	67,8025
1,64	65,5945	1,89	67,8935
1,65	65,6865	1,9	67,9855
1,66	65,7785	1,91	68,0775
1,67	65,8715	1,92	68,1685
1,68	65,9635	1,93	68,2605
1,69	66,0555	1,94	68,3515
1,7	66,1475	1,95	68,4435
1,71	66,2395	1,96	68,5345
1,72	66,3325	1,97	68,6265
1,73	66,4245	1,98	68,7175
1,74	66,5165	1,99	68,8085
1,75	66,6085	2	68,9005



Gambar 4. Hasil simulasi pada waktu 2 detik setelah pecahnya bendungan kering

KESIMPULAN

Hasil penelitian dalam makalah ini menguatkan kesimpulan dalam penelitian sebelumnya bahwa berbeda dari masalah bendungan planar yang posisi *shock* adalah linear terhadap waktu, posisi *shock* dari pecahnya bendungan lingkar yang basah di mana-mana adalah nonlinear terhadap waktu. Selain itu, sesuai dengan bendungan planar, makalah ini juga menyimpulkan bahwa tidak ada *shock* yang muncul jika tanah di luar bendungan adalah kering.

UCAPAN TERIMA KASIH

Penulis berterima kasih kepada Professor Stephen Roberts and Mr Padarn Wilson di Australian National University, Canberra, Australia atas diskusi tentang persamaan air dangkal dengan variasi lebar aliran.

DAFTAR PUSTAKA

- [1] S. Mungkasi, “*Shock wave propagation of circular dam break problems*,” *Journal of Physics: Conference Series*, to appear, 2014.
- [2] S. G. Roberts and P. Wilson, “A well balanced scheme for the shallow water wave equations in open channels with (discontinuous) varying width and bed,” *ANZIAM Journal*, vol. 52, pp. C967–C987, 2011.
- [3] A. Birman A and J. Falcovitz, “Application of the GRP scheme to open channel flow equations,” *Journal of Computational Physics*, vol. 222, pp. 131–154, 2007.
- [4] B. de Saint-Venant, “Theorie du mouvement non-permanent des eaux, avec application aux crues des rivières et a l’introduction des marées dans leur lits,” *Comptes Rendus de l’Academie des Sciences, Paris*, vol. 73, pp. 147–154 & pp. 237–240, 1871.
- [5] R. J. LeVeque, *Finite Volume Methods for Hyperbolic Problems*, Cambridge University Press, 2002.
- [6] S. Mungkasi, “A study of well-balanced finite volume methods and refinement indicators for

the shallow water equations,” *Thesis of Doctor of Philosophy*, The Australian National University, Canberra, Australia, 2012.

- [7] J. J. Stoker, *Water Waves: The Mathematical Theory with Application*, Interscience Publishers, 1957.